編者的話

数学课外读物对于帮助学生学好数学，扩大他们的数学知识领域，是很有好处的．近年来，越来越多的中学学生和教师，都迫切希望出版更多的适合中学生阅读的通俗数学读物．我们约请一些数学工作者，编了这套“数学小丛书”，陆续分册出版，来适应这个要求．

这套书打算介绍一些课外的数学知识，以扩大学生的知识领域，加深对数学基础知识的掌握，引导学生独立思考，理论联系实际．

这是我们的初步想法和尝试．热切地希望数学工作者和读者对我们的工作提出宝贵的意见和建议，更希望数学工作者为中学生写出更多更好的数学课外读物．

北京市数学会

1962 年 4 月

目　次

一　从邮递路綫問題說起

“一个邮递员每次送信，要走遍他负责投递的范围内的街道，完成任务后回到邮局．问他按怎样的路线走，所走的路程最短？”

这个问题叫做**最短邮递路线问题**，是邮递员每天都要碰到的．1959年，在山东省用运筹学解决实际问题的热潮中，发明了一种求最短邮递路线的数学方法——**奇偶点图上作业法**．据说在某地用这个方法改善了投递制度后，邮递的效率大大提高．

这是一个又实用又有趣的问题，值得我们花一些时间来研究一下．

最理想的邮递路线当然是从邮局出发，走遍每条街而且都只走过一次，最后回到邮局．这样的路线由于没有重复，显然是最短的．

然而这么理想的路线一定找得到吗？

比方说有象下面图1、图2那样的街道图，图中A是邮

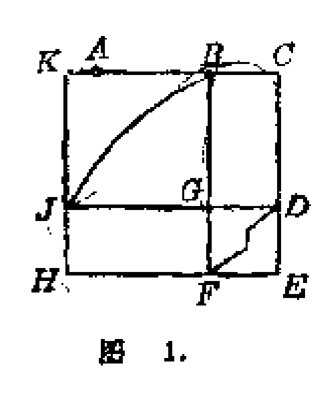


图　1.

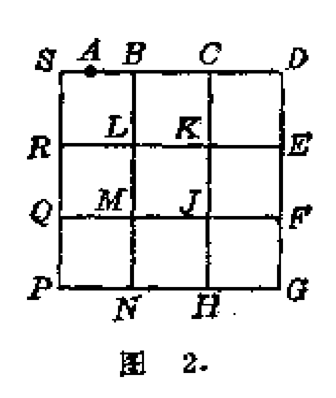


图　2.

局. 从 A 出发，要走遍每条街而且都只走过一次，在图 1 上是可以做到的，例如 $A-B-C-D-E-F-G-B-J-G-D-F-H-J-K-A$，或 $A-B-C-D-F-E-D-G-J-B-G-F-H-J-K-A$，或 $A-B-G-F-D-G-J-B-C-D-E-F-H-J-K-A$，等等. 可是图 2 却不行，不管你怎样走，不是有几段没有走到，便是有几段得重复走.

看来不是在任何条件下都能找到这么理想的路线的. 那么是在什么样的条件下能找到理想路线呢？

这使我们联想到一种有名的数学游戏，叫做一笔画.

二 一笔画問題

一笔画问题是问：什么样的图形可以一笔画成，笔不离纸，而且每条线都只画一次不准重复？

譬如下面图 3 中的三个图形，读者试过各种画法后，会断定"田"和"品"不可能一笔画成，而"串"却可以.

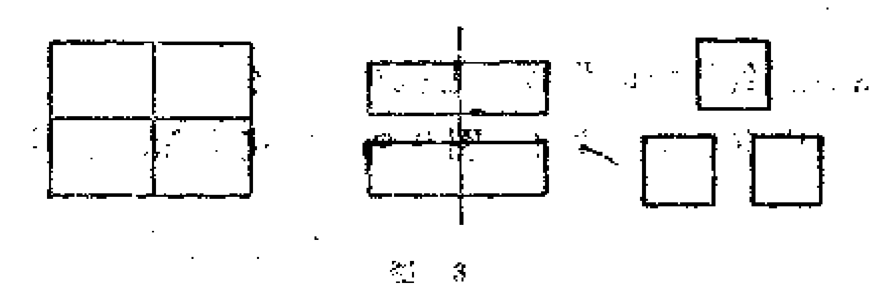


图 3

刚才的理想邮递路线问题，比一笔画要求还多一点：最后要画回起点. 但是以后我们会看到，这点差别是不顶要紧的.

所以一笔画问题可以说就是最短邮递路线问题的一部分，是理想邮递路线找不找得到的问题. 其实，我们用来解决

邮递路线问题的奇偶点图上作业法，就是以一笔画的研究作为理论基础的. 所以我们准备先把最短邮递路线问题搁在一边，花比较多的篇幅讨论一笔画问题[①]，然后再回头来分析最短邮递路线问题.

一笔画问题是数学家欧拉(Euler, 1707—1783)提出并解决的. 说起来还有一段故事呢.

三　七座桥的故事

故事发生在十八世纪的哥尼斯堡城，那里有七座桥，如图4. 当时那里的居民热衷于一个难题：一个散步者怎样能一次走遍七座桥，每座桥只走过一次，最后回到出发点？这题目似乎不难，谁都愿意试一试，但是谁也回答不出.

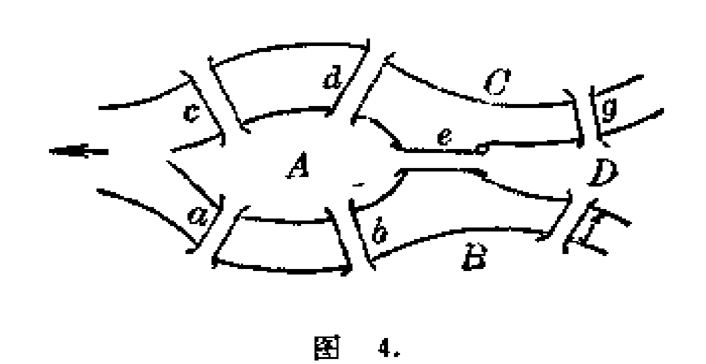


图　4.

欧拉的头脑比较冷静. 千百人的失败，使他猜想：也许那样的走法根本就不存在. 1733年. 他证明了他的猜想，并在圣彼得堡科学院作了一次报告(见附录二).

---

① 在孙泽瀛所著《数学方法趣引》(中国科学图书仪器公司出版)一书里，有一笔画問題的精采討論，可以参考. 不过我們的讲法和他不一样.

他首先用一点 A 表示岛，点 B 表示河的左岸，C 表示右岸，D 表示两支流间的地区（参看图4）；用联结两点的线来表示联结两块陆地的桥，得到一个由七条线组成的图形（如图 5）．前面的七桥问题就变成一个一笔画问题：能否一笔画出这个图形，并且最后返回起点？

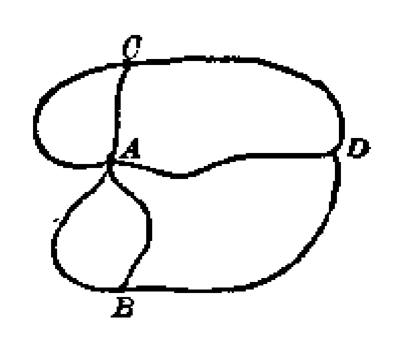


图 5.

现在我们分析一下用笔画图的过程．如果我们从某一点出发，一笔画出了某个图形，到某一点终止，那么中间每经过一点，总有画进那点去的一条线和从那点画出来的一条线．所以除了起点和终点这两个点以外，这个图形的每一点应该和偶数条线相联．如果起点和终点重合，那么连这个点也应该和偶数条线相联．

然而我们的图形上的四个点都和三条（B，C，D 各点）或五条（A 点）线相联，都是奇数条线．这样当然不可能一笔画出并回到起点．即使不要求回到起点，也不可能一笔画出．

正是经过这样分析，欧拉断定，不管要求不要求回到出发点，不重复地一次走遍那七座桥，总是不可能的．

七桥问题，或者一笔画问题，明显地是一个几何问题．然而这种几何问题却是欧几里得几何学（即中学里的平面几何和立体几何）所没有研究过的．因为欧氏几何中研究的图形，都由直线和圆组成，讨论的是长度、角度等等性质，而在七桥问题里，桥的准确位置、长度是无关紧要的，要紧的只是哪两

块陆地间有几座桥；一笔画问题里线条的长短曲直也无关紧要，要紧的只是有几个分叉点，哪几对点间有几条线相联．也可以说，要紧的只是点线之间的相关位置，或相互联结的情况．所以欧拉把这类几何问题的研究叫做**位置几何学**．对于这么一类新鲜的几何问题，欧拉当然不满足于只解答一个七桥问题．他继续钻研，终于找到了一个简便的原则，可以鉴别任一图形能不能一笔画出．这个原则，就是**一笔画定理**．

在讲一笔画定理之前，为了把问题弄得更清楚些，使叙述和论证更确切些，我们需要先引进一些术语和记号．

四　网络

我们要讨论的图形都是由线条构成的，不考虑整块的面积，也不考虑孤立的点．对于这种讨论对象，我们用一个专门的名词来叫它，叫做**网络**．为了明确起见，我们给它下一个定义：

网络是由有限条线组成的图形，每条线都要求有两个相异的端点．这些线叫做网络的**弧**，它们的端点叫做网络的**顶点**．

这个定义是根据一笔画问题的特点提出来的．我们知道，按通常的看法，图形是由点组成的，由无数的点组成．点多得无法掌握，这是一个大困难．然而在用笔画图时，总是一条条线去画，不会一个个点描的．一条线不论是长是短，是直是弯，都能从一端到另一端一笔勾出．所以现在我们把图形看成是由线组成的，由有限条线组成；换句话说，把图形看成网

络．把一个图形看成网络，就意味着把它分解成若干条弧．

平面几何与立体几何中所遇到的许多由线条构成的图形，在适当地分解成弧以后，都能看成网络．网络的弧不能没有端点（象圆圈的圆），也不能只有一个端点（象两端重叠的闭线），而必须有两个端点．但是这条规定不会束缚我们的手脚．例如图 6 中把圆周分解成两条弧两个顶点的网络．我们没有规定网络的弧彼此不相交．但是在把相交的线条看成网络时，常常把所有的交叉点都算做顶点，把那些线条相应地算做若干条弧，尽量避免弧与弧相交．例如平面上的凸四边形添上两条对角线所成的图形，我们通常不把它看成六条弧四个顶点的网络（如图 7），而看成八条弧五个顶点的网络（如图 8）．

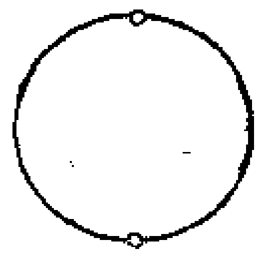


图 6.

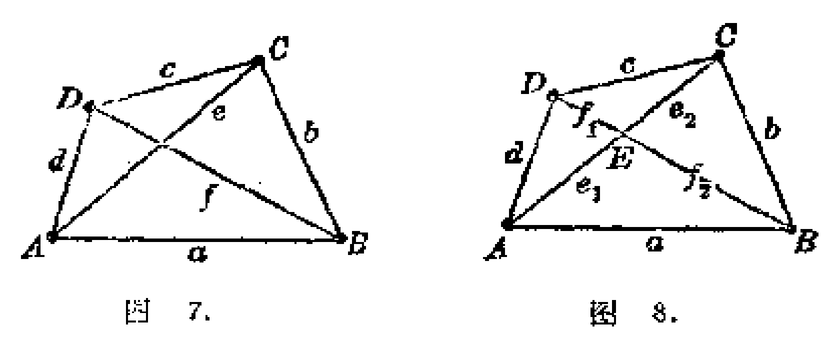


图 7.　　图 8.

为什么要这样比较抽象地提出网络的概念呢？这是因为，有了网络的概念，不但使我们以后说起话来方便，而且可以扩大我们讨论适用的范围．因为按照这个定义，不单纸上的一个图可以看成网络，一个电子仪器的复杂的电路也可以看成网络，一个国家的铁路网、公路网、水运网，一个区的街道网，都可以看成网络．不但有平面上的网络，还可以有空间中

的网络. 所以我们以后对一般的网络进行研究所得到的种种结论, 就会对所有这些具体的网络都适用.

为了记述方便, 我们规定用这样的记号: 凡是网络中的顶点都用大写字母, 弧都用小写字母. 用 $l=AB$ 表示弧 l 以 A,B 为端点. 当然, 如果 $l=AB$, 那么也有 $l=BA$. 但要注意, 若 $l_1=AB, l_2=AB$, 未必 $l_1=l_2$, 因为以 A,B 为端点的弧可以不止一条. 网络本身用黑体大写字母, 譬如 $\mathbf{G}$, 来表示.

互相衔接的一串弧叫做一条路. 明确地说, 网络中的路是一串弧 $(l_1, l_2, \cdots, l_k)$, 这些弧两两不相同, 并且每条弧 $l_i(i=2, \cdots, k-1)$ 都以一端 A_{i-1} 和 l_{i-1} 相接, 另一端 A_i 和 l_{i+1} 相接. 路也用黑体大写字母表示, 记做 $\mathbf{W}=(l_1, l_2, \cdots, l_k)$, $l_i=A_{i-1}A_i$ $(i=1, 2, \cdots, k)$. A_0 和 A_k 叫做这路的两端, 或者说这路连结 A_0 和 A_k. 若 $A_0=A_k$, 那么这路叫闭路. 若顶点 $A_0, A_1, \cdots, A_{k-1}$ 又互不相同, 那么这闭路叫做圈. 例如图 9 中, (a, d, g, e) 不是路, (a, d, e, g) 是路; $(a, g, h, f, c, b, d, e, h)$ 不是闭路 (也不是路), 因为弧 h 出现了两次; (a, b, c, e, g, d, f) 是闭路而不是圈; (a, d, e, h) 是一个圈.

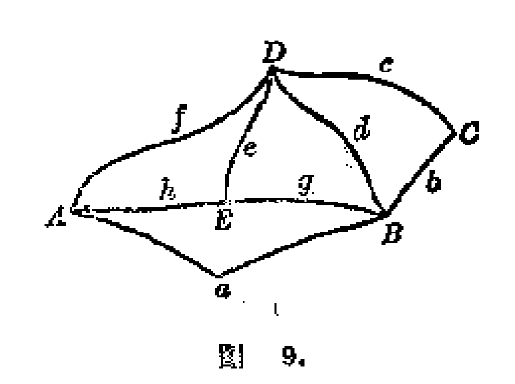


图 9.

现在不难看出, 一笔画问题相当于: 给定了一个网络, 问有没有可能把所有的弧排成一条路. 而要求一笔画成后回到起点, 就相当于要求把全部的弧排成一条闭路. 这就把一笔画问题用网络的语言提明确了. 同时也把问题推广了, 因为

原来的一笔画问题只是对平面上的图形说的，而现在的提法却对任何网络都有意义，不必限于平面上的网络。如果一个网络的全部弧可以排成一条路(不必是闭路)，这网络就叫做**一个一笔画**。

有一些图形，象前面图3中的“品”字，所以不能一笔画成，显然因为它不是连在一起的。可见能一笔画成的图形必定是连成一片的。所谓连成一片到底是什么意思？我们也来下个定义。一个网络称为**连通的**，如果它的任意两个顶点都可用一条路连结起来；否则称为**不连通的**。例如图10中左边的网络是连通的，右边的是不连通的，因为其中有几对顶点，例如 A、D，或 D、G，无法用路连结。

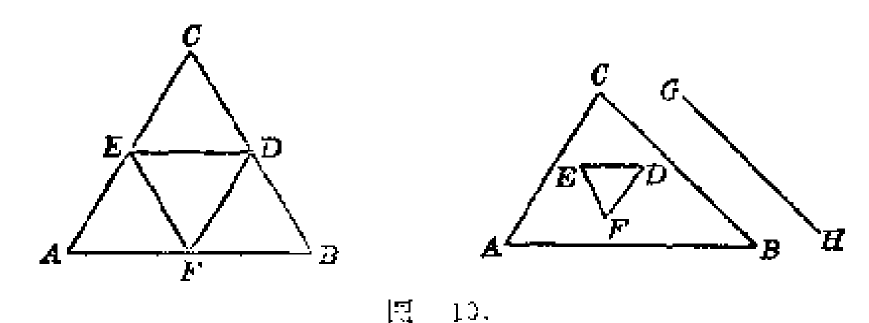


图 10.

如果某网络是由几个网络并成的，这几个网络彼此没有公共的顶点和弧，那么这网络就一定是不连通的。反过来，可以证明，不连通的网络总是由几个互不相交的连通网络并成的；这几个连通网络叫做这不连通网络的**分支**。例如图10右边的网络，有三个分支：三角形 ABC，三角形 DEF，线段 GH。连通网络只有一个分支。

我们曾经注意到，一笔画问题又和顶点联结的弧数，即顶点处的分叉情况有关。以某个顶点为端点的弧的条数，叫做

这顶点的**叉数**．例如图 9 中 B 是 4 叉顶点，C 是 2 叉顶点，E 是 3 叉顶点．顶点的叉数有奇偶之分．叉数是奇数的顶点叫做**奇顶点**，叉数是偶数的顶点叫做**偶顶点**．奇顶点的多少，和一笔画问题有极大关系．没有奇顶点的网络，叫做**偶网络**．

有了这些准备，可以讲一笔画定理了。

五　一笔画定理

我们分两个问题讲：根据哪些特征可以断定一个网络不是一笔画？根据哪些特征可以断定一个网络是一笔画？先来谈谈第一个问题．

要证明一个网络(例如图 5 上的网络)不是一笔画，就应该证明在这网络中全部的弧不可能排成一条路，或者说这网络中不存在一条路包括全部的弧．也就是说，不能只是承认你自己没能找到这样的路，还要能断言别人也不会找到；不但是至今没人找到过，而且将来任何时候也不会有人找得到．要论证，找不到的原因并不是你主观上能力不够，而是客观上根本不存在．这种“不存在性”定理在数学中是很多的．有的很容易证，譬如说：不存在三边长度分别是 2，3，4 的直角三角形，因为直角三角形的三边长度必须满足勾股弦定理，而 $2^2+3^2=13\neq4^2$．也有的很不容易证，譬如说：不可能用圆规和直尺三等分任意角①．证明“不存在性”定理的最常用的办

① 三等分一角的問題，可以參看《你会不会三等分一角？》，錢曾濤著，中国青年出版社出版．那里指出了怎样去证明不可能用圆规和直尺三等分任意角，但是論证还不十分严密．又可参看聂灵沼：《几何作图》，《数学通报》1957 年 2 月号。

法，是用反推法：先证明，假如“存在”，那么必须如何如何；然后说，现在并不如何如何，所以“不存在”．上面证那直角三角形的不存在，用的是这个办法．第三节证明七桥问题不可能有解，用的也是这个办法．

由此可见，我们的第一个问题可以换个问法：一笔画必须具备哪些性质？下面的定理就是回答这个问题的，解决七桥问题的实际上正是这个定理．它的证明其实也已直观地讲过(页4和页8)，现在严密地写出来．

定理一 一笔画必是連通的，并且奇頂点的个数是0或2.

证明 一笔画的全部弧可以排成一条路

$$Z=(l_1, l_2, \cdots, l_k), l_i=A_{i-1}A_i, \quad i=1, 2, \cdots, k.$$

这里 $A_0, A_1, \cdots, A_k$ 包括这网络的全部顶点(可能有重复)，因为任一顶点至少是一条弧的端点．任取两顶点 A_i，A_j，$i<j$，它们可用路$(l_{i+1}, \cdots, l_j)$联结起来．所以这网络是连通的．

任取网络中的一个顶点 A，假设它在序列 $A_0, A_1, \cdots, A_k$ 中出现 s 次：$A=A_{i_1}=A_{i_2}=\cdots=A_{i_s}$，$0\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_s\leqslant k$，那么对每个 i_r，$1\leqslant r<s$，都有 $i_r+1<i_{r+1}$；因为否则 $i_r+1=i_{r+1}$，即 $l_{i_{r+1}}$ 的两端点相同，与网络定义抵触．假如 A 不是 A_0 或 A_k，即 $i_1>0$，$i_s<k$，那么以 A 为端点的弧有 $2s$ 条：l_{i_1}，l_{i_1+1}；l_{i_2}，l_{i_2+1}；$\cdots$，$\cdots$；l_{i_s}，l_{i_s+1}．假如 $A=A_0\neq A_k$，即 $i_1=0$，$i_s<k$，那么以 A 为端点的弧有$2s-1$条：l_1；l_{i_2}，l_{i_2+1}；$\cdots$，$\cdots$；l_{i_s}，l_{i_s+1}．类似地，假如 $A=A_k\neq A_0$，以 A 为端点的弧也是 $2s-1$ 条．假如 Z 是闭路，$A_0=A_k$，而 $A=A_0=A_k$，那么 $i_1=0$，$i_s=k$，以 A 为端点的弧就只有 $2s-2$ 条：l_1；l_{i_2}，l_{i_2+1}；$\cdots$，$\cdots$；$l_{i_{s-1}}$，

$l_{i_{g-1}+1}$; l_k. 归纳起来，如果 Z 是闭路，那么这网络的任一顶点都是偶数叉的，即都是偶顶点；如果 Z 不是闭路，那么有两个奇顶点 A_0 和 A_k，其余的顶点都是偶顶点. |①

这定理使我们能够断定：不连通的，或者奇顶点个数不是 0 或 2 的网络，一定不是一笔画. 那么，如果一个网络是连通的，奇顶点的个数又恰是 0 或 2，它就一定是一笔画吗？欧拉的判断：是的. 这回答了我们的第二个问题：根据哪些特征可以断定一个网络是一笔画. 怎么证呢？要证明一个网络是一笔画，就应该证明这网络中的全部弧可以排成一条路，或者说这网络中存在一条路包括全部的弧. 这种"存在性"定理在数学中也是很多的. 有的很容易证，譬如说：任给三个长度 a, b, c，只要其中任意两个的和大于第三个，就存在一个三角形，以 a, b, c 为三边的长；因为我们可以说出一种作图方法作出一个来给你看. 也有的很不容易证，譬如说：任意一个复数系数的 n 次多项式($n>0$)至少有一个复数根. "存在性"定理所肯定的只是"存在"，至于有多少，那是另一个问题了.

证明"存在性"定理，最简单的办法是直接求出一个来. 上面说的那三角形的存在性，就是这样证明的，前面图 3 中中间那个图形可以一笔画出，也是这样证明的. 可是要用这办法来证明欧拉的判断有困难. 对于一个两个具体的网络，你可以逐一去找出包含所有弧的路，来证明它们是一笔画. 现在要证的却是有某某性质的网络都是一笔画，有这些性质的

① 粗黑线 | 表示证明完毕.

网络多得不可胜数，怎么可能去逐一找出路来呢？而欧拉的判断的妙处，正是使你能够在碰到某些很复杂的网络时，不用找路就能很快地断定它是一笔画。

我们把欧拉的判断分成两个定理来讲．证明的线索可说是，间接地指出一种把全部弧排成路的办法．在推理过程中，网络中弧的有限性起着重要作用。

定理二 若G是连通的偶网络，那么G的全部弧可以排成一条闭路。

证明 分几步来证。

(1) 先证：在偶网络G中任取一顶点A_0，那么在G中一定能找到从A_0到A_0的闭路。

事实上，任取第一条弧$l_1=A_0A_1$，再取另一条$l_2=A_1A_2$，如果可能的话再取第三条$l_3=A_2A_3$，等等．这样作出一条路

$$Z=(l_1, l_2, \cdots, l_k),\quad l_i=A_{i-1}A_i,\quad i=1, \cdots, k.$$

当$A_k\neq A_0$时，这条路一定还可以继续延长；因为这时Z中以A_k为端点的弧是奇数条（证法和定理一一样），而A_k是偶顶点，一定还可以找到不在Z中的弧$l_{k+1}=A_kA_{k+1}$，而得到路$(l_1, \cdots, l_k, l_{k+1})$．这条路越作越长，但$G$中总共只有有限条弧，所以总有一个时候作不下去了．设这时的路是$(l_1, \cdots, l_m)$，$l_i=A_{i-1}A_i$，$i=1, \cdots, m$，那么A_m必定和A_0重合，即这条路是闭路。

(2) 再证：若G是连通的偶网络，Z是其中的一条闭路，它没有包含所有的弧．那么一定还能找到一条闭路$\overline{Z}$，它包含的弧比Z多。

设$\mathbf{Z}=(l_1,\cdots,l_k)$，$l_i=A_{i-1}A_i$，$A_k=A_0$. 从网络$G$中把$\mathbf{Z}$的弧抹掉，还剩下一个网络$G'$. 这$G'$一定也没有奇顶点，即也是偶网络. 因为任取$G'$的一个顶点$A$. G中有偶数条弧以A为端点；$\mathbf{Z}$是闭路，所以$\mathbf{Z}$中也有偶数条弧以A为端点，于是G'中以A为端点的弧也是偶数条.

$\mathbf{Z}$和G'必定有公共的顶点，否则G由两个没有公共顶点的网络$\mathbf{Z}$和G'并成，就应该不连通了，这和假设矛盾. 设$B_0=A_r$是一个公共顶点，$1\leqslant r\leqslant k$.

根据(1)，G'中一定有从B_0到B_0的闭路

$\mathbf{Z}'=(l_1',\cdots,l_s')$，$l_j'=B_{j-1}B_j$，$j=1,\cdots,s$，$B_s=B_0$.

于是

$$\overline{\mathbf{Z}}=(l_1,\cdots,l_r,l_1',\cdots,l_s',l_{r+1},\cdots,l_k)$$

就是G的一条闭路，它包含的弧比$\mathbf{Z}$多. 图11就是一个例子.

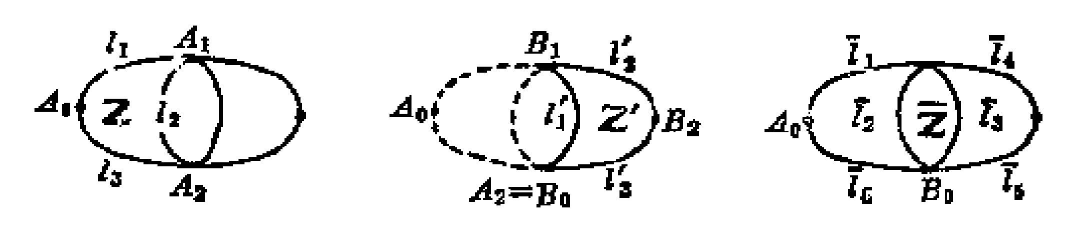


图 11.

(3) 定理的证明：根据(1)，在G中取出一条闭路$\mathbf{Z}$. 若$\mathbf{Z}$没有包含所有的弧，根据(2)，取一条包含弧比$\mathbf{Z}$多的闭路$\overline{\mathbf{Z}}$. 若$\overline{\mathbf{Z}}$还没有包含所有的弧，再如法取$\overline{\overline{\mathbf{Z}}}$，这样继续扩大下去. 由于$G$中总共只有有限条弧，总有一个时候(譬如说在扩大成$\tilde{\mathbf{Z}}$的时候)扩大不下去了. 这时根据(2)，那闭路$\tilde{\mathbf{Z}}$必然包含$G$中所有的弧. ▎

定理三 如果一个连通网络的奇顶点个数是 2，这网络必定是一笔画.

证明 这个定理的证明可以仿照定理二，分三步.（1）先证：若 G 是有两个奇顶点 A, B 的网络，那么在 G 中一定能找到从 A 到 B 的路；（2）再证：若 G 是有两个奇顶点 A, B 的连通网络，W 是从 A 到 B 的一条路，它没有包含 G 的全部弧，那么一定还能找到一条从 A 到 B 的路 $\overline{W}$，包含的弧比 W 多；（3）定理本身的证明. 建议读者自己去证明，作为练习.

还有一种更巧妙的证法：在 G 中添加一条连结奇顶点 A、B 的弧 l^*.（注意，如果我们考虑的是平面上的网络，限定在平面上找这样的 l^*，又要求它和 G 中原有的弧不相交，那不见得能找到，如图 12. 我们现在是在空间中添这条弧，这总是办得到的. 这是不局限于讨论平面网络的一个好处.）添加 l^* 后所得的网络 G^* 就是一个没有奇顶点的连通网络了. 根据定理二，它的所有的弧可以排成一条闭路，而且不妨把 l^* 排在前头：$(l^*, l_1, l_2, \cdots, l_k)$. 于是 G 的全部弧可以排成一条路 $(l_1, l_2, \cdots, l_k)$. ▌

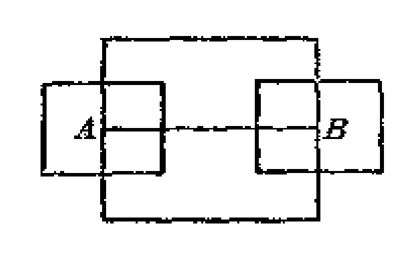


图 12.

定理一告诉我们，一笔画必须是连通的，而且奇顶点个数是 0 或 2. 定理二、三又告诉我们，从这两个性质就足以断定一个网络是一笔画. 合起来说就是

一笔画定理 一个网络是一笔画的充分必要条件是：它连通并且奇顶点个数等于 0 或 2.

一笔画定理把一笔画问题很彻底、很漂亮地解决了．彻底，指的是它给出了充分、必要条件，因而把一笔画和非一笔画的界线彻底划清了．漂亮，因为它指出的充分、必要条件简单明了，很容易检验，用起来很方便．即使给你一个几十条弧的网络，要判别它也花不了一两分钟．

从一笔画理论容易看出，在邮递路线问题中，可能找到理想的不重复的路线的充分、必要条件是，投递范围的街道网连通并且没有奇顶点．

六　多笔画

我们可以进一步提出问题：如果一个连通网络G的奇顶点个数不是0或2，那么一笔是画不成了．要多少笔才画得成呢？想来这笔数一定还和奇顶点的个数有关系．我们先证明关于奇顶点个数的定理．

定理四　一个网络中奇顶点的个数必定是偶数．

证明　设网络中弧的条数是α_1，m叉顶点的个数是$\alpha_0^{(m)}$．我们来数一数这网络中"端点"的个数．一方面，每条弧有2个端点，另一方面，每个m叉顶点是m个端点．所以

$$2\alpha_1 = \alpha_0^{(1)} + 2\alpha_0^{(2)} + 3\alpha_0^{(3)} + 4\alpha_0^{(4)} + 5\alpha_0^{(5)} + \cdots.$$

从这个偶数中减去偶数

$$2\alpha_0^{(2)} + 2\alpha_0^{(3)} + 4\alpha_0^{(4)} + 4\alpha_0^{(5)} + \cdots,$$

得到的数

$$\alpha_0^{(1)} + \alpha_0^{(3)} + \alpha_0^{(5)} + \cdots$$

还应该是偶数，而这数正好是奇顶点的个数！

定理五 設G是有$2n$个奇頂点的連通网絡，$n>1$. 那么G中全部弧可以排成n条路(彼此沒有公共弧的)，而且至少n条路.

证明 把这$2n$个奇顶点分成n对：$A_1, B_1, A_2, B_2, \cdots, \cdots, A_n, B_n$. 给$G$添上$n$条新的弧$l_i^*=A_iB_i$. 所得的网络$G^*$是没有奇顶点的连通网络. 把$G^*$的全部弧排成闭路$Z$，然后从中把那$n$条新添的弧去掉. 于是闭路$Z$被断成$n$截. 每一截是$G$中的一条路，这$n$条路包含了$G$的全部弧.

至少要n条路，这是显然的. 因为如果能排成q条路，那么G中奇顶点的个数$\leqslant 2q$. 所以$2n\leqslant 2q$，$q\geqslant n$. |

七 偶网絡

一笔画和偶网络，有联系也有区别. 一个一笔画不一定是偶网络，因为一笔画可以有2个奇顶点，而偶网络没有奇顶点. 另一方面，一笔画必须是连通的网络，偶网络却可以是不连通的. 现在我们要讲一个关于偶网络的定理，后面讲邮递路线问题时要用的.

定理六 网絡G是偶网絡的充分、必要条件是：G的所有的弧可以排成若干个圈，这些圈彼此沒有公共弧.

证明 这条件的充分性（如果G的所有的弧能排成若干个彼此没有公共弧的圈，那么G没有奇顶点)是容易看出的. 我们来证必要性，即若G没有奇顶点，那么G的全部弧一定可以排成若干个彼此没有公共弧的圈. 证明分两步：

(1) 先证：任取偶网络G的一个顶点A_0，一定能够找到

从 A_0 到 A_0 的圈. 根据定理二证明中的(1), G 中有从 A_0 到 A_0 的闭路. 取出这种闭路中弧数最少的一条（或弧数最少的几条之一）

$$Z=(l_1, l_2, \cdots, l_k), \ l_i=A_{i-1}A_i, \ A_k=A_0.$$

这条闭路必定是圈. 因为否则会有 i, j 两数, $1\leqslant i<j\leqslant k$, 使 $A_i=A_j$. 于是 $(l_1, \cdots, l_i, l_{j+1}, \cdots, l_k)$ 是比 Z 短的从 A_0 到 A_0 的闭路, 和 Z 最短这假定矛盾.

(2)定理的证明: 在 G 中取一个圈 Z. 假如 Z 已包含 G 的全部弧, 定理已成立. 否则, 从 G 中把 Z 的弧抹掉, 剩下的网络 G_1 还是没有奇顶点的. 再从 G_1 中取一个圈 Z_1, 假如它已包含 G_1 的全部弧, 那么 G 的全部弧可排成两个圈 Z 和 Z_1. 否则从 G_1 中把 Z_1 的弧抹掉, 又得一偶网络 G_2. 这样一直作下去, 引出一串偶网络

$$G, G_1, G_2, \cdots.$$

由于弧数一个比一个少, 而 G 中总共只有有限条弧, 所以这串网络总有个尽头 G_r. 在 G_r 中取出的圈 Z_r 一定包含 G_r 的所有的弧（否则还有 G_{r+1}）. 于是 G 中的全部弧可以排成 $r+1$ 个圈 $Z, Z_1, \cdots, Z_r$. [①]

---

① 这证明的最后部分也可以利用数学归納法. 数学归納法是一种很常用的证明方法. 它的原理如下: 假設有一串命題 $P_1, P_2, P_3, \cdots, P_n\cdots$, 对每个自然数 n 有一个命題. 如果命題 P_1 成立, 而且我們能证明: 对任一自然数 k, 只要命題 $P_1, P_2, \cdots, P_{k-1}$ 都成立, 那么命題 P_k 必成立. 那么命題 P_n 对任意 n 都成立.

在我們这里, 命題 P_n 是: 对 $n+1$ 条弧的网絡, 定理六成立. 那么当我們从 G 得到 G' 后, 就能证明: 只要定理六对弧数小于 $k+1$ 的网絡都成立, 那么它对弧数是 $k+1$ 的网絡必成立. 两条弧的偶网絡显然是一个圈, 所以命題 P_1 成立（注意, 偶网絡至少有两条弧）. 根据归納法原理, 我們的定理对任意多条弧的网絡都成立.

八　再回到邮递路綫問題

我们已经比较深入地讨论了一笔画问题，现在要回到最短邮递路线问题，讲奇偶点图上作业法.[①]

最短邮递路线问题的提法，这本书一开头就讲过了. 用网络的语言，这个问题可以改说成：

给定一个连通的网络(投递范圍的街道图)，每条弧有个长度[②]，要求从某一顶点(邮局)出发一次走遍这网络的所有弧(但允许重复，这是和一笔画问题中不同的)，并且最后返回起点，问怎样走法才能使走的路程最短？

根据一笔画理论，我们可以这样来分析这问题.

如果这网络中没有奇顶点，那么根据定理二，它可以从任一点开始没有重复地一笔画出，最后回到起点. 前面已经说过，这样理想的路线是最短的.

如果网络中有奇顶点，例如图13，那么要从一点开始走遍各弧回到起点，必须有重复(因为从定理一的证明知道，如果Z是闭路，也就是要从一点开始走遍各弧回到起点，奇顶

---

① 关于奇偶点图上作业法，可参看：

(1) 管梅谷：《奇偶点图上作业法》，《数学学报》，1960年第3期；

(2) 华罗庚：《在国民經济建設中应用广泛的一門学科——运筹学》(四)，《科学大众》，1961年第3期.

由于应用了定理六，我們的证明比管梅谷同志的要简單一些.

② 注意，在一笔画理論中，从来沒有提到过弧的长度，因为在那里弧的长度是不起作用的. 偶尔談到路的长短，所指的不过是路所包含的弧的数目多少. 現在，在邮递路綫問題里，却必須考虑弧的长度了.

点的个数必须是0)．走的路程的长短，就看路线中重复部分的长短．如果把某一种走法的重复路线添在图上，如图14，那么所有的顶点一定都变成偶顶点了．反过来说，若先在网络中某些弧上添一些“重复弧”，使得添加后的网络中所有的顶点都是偶顶点，那么根据定理二，添加后的网络就能够不重复地一次走遍并返回起点，也就是说代表一种走法，如图15.

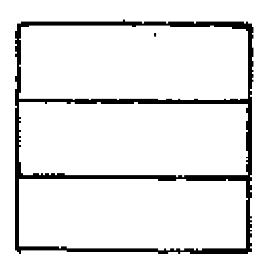


图 13.

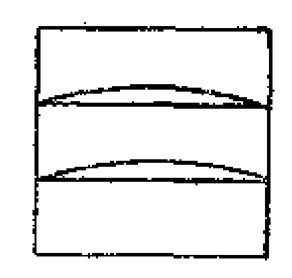


图 14.

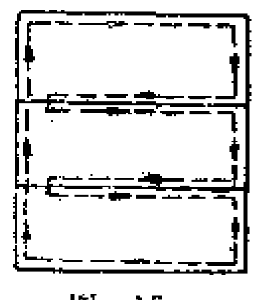


图 15.

因此，利用了一笔画的理论，我们把问题化成：一个连通网络有 $2n$ 个奇顶点．要在某些弧上添一些重复弧（每条弧上添的重复弧条数不限，重复弧和原弧同长），使得添弧后的网络没有奇顶点(换句话说，以原网络的每个奇顶点为端点的重复弧必须是奇数条，以原网络的每个偶顶点为端点的重复弧必须是偶数条)．问怎样添法能使重复弧的总长度最短？下面要对这个网络问题作严密的数学的讨论．

九　奇偶点图上作业法

为以后说话方便，我们把添重复弧后没有奇顶点的添法叫**解**，重复弧总长度最短的解叫**最优解**．现在先提几个命题．

命题一　解总是存在的．

这不是废话，因为我们已经知道，不是随便什么数学问题

都有解的．要断定有解，必须说道理，不管这道理多么浅显．

在我们这里，解的存在性在直觉上十分明显，因为只要允许重复，总可以走遍各街道返回邮局．作为数学证明，我们具体指出一个作解的方法．把原网络中的 $2n$ 个奇顶点随便分成 n 对：$A_1, B_1; A_2, B_2; \cdots, \cdots; A_n, B_n$．取 n 条路 $\boldsymbol{W}_1, \boldsymbol{W}_2, \cdots, \boldsymbol{W}_n$，分别连结 $A_1, B_1; A_2, B_2; \cdots, \cdots; A_n, B_n$．或者一般的说，$\boldsymbol{W}_i$ 连结 A_i, B_i．由于原网络是连通的，这些路总是有的．把这些路中的弧作为重复弧添到原网络去，就是一个解．

由此可见，要具体找一个解是很容易的．问题只是怎么求最优解．可能有的读者会这样想：只要每条 $\boldsymbol{W}_i$ 都是连结 A_i 和 B_i 的最短的路，不就得到最优解了吗？其实问题不那么简单．也许把那 $2n$ 个奇顶点用另一种办法分对，得到的路会短些呢！例如图 16 是一个街道图，图上注明数字是各段街道的长短百米数．这个网络中有 8 个奇顶点．要是我们把它们象图 17 这样分对，那么添上连结 A_i, B_i 的最短路 $\boldsymbol{W}_i (i=1, 2, 3, 4)$ 得出解(1)，然而从图 17 可以看出，它不是最优解．

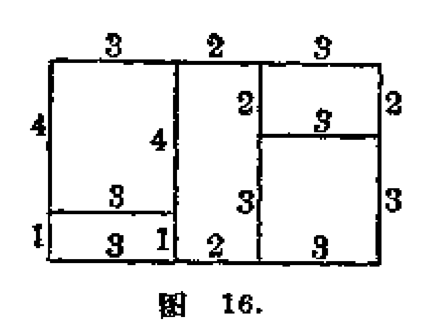


图 16.

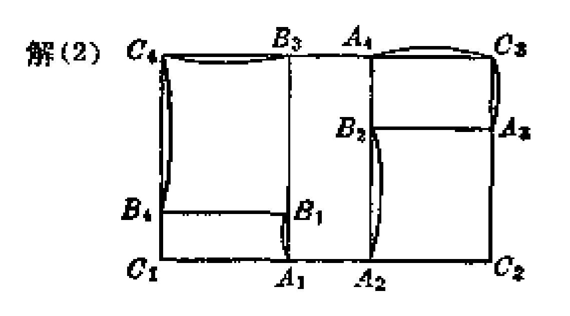
怎样研究最优解呢？无论做什么事，写文章也好，做习题也好，总不会一下手就十全十美的，总有一个琢磨推敲、修正缺点、逐渐完善的过程．同样道理，一个比较好的解常常是从修改比较差的解而得到的．所以我们先来考虑，随便拿一个解来，怎样能逐步修改它，使它缩短．

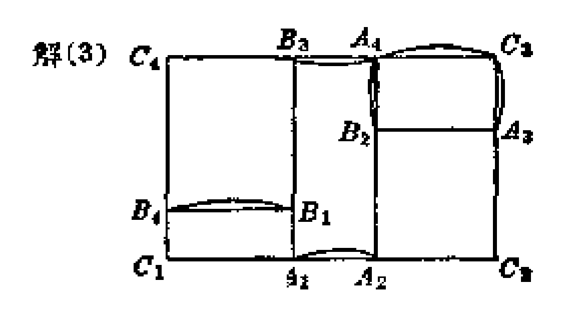
我们看图17上的解(1)，这里 B_3 和 A_4 之间有二条重复弧，这就是一个可以改进的地方．我们提出一个命题：

命题二 如果一个解有重叠的重复弧，即在某条弧上有多于一条的重复弧，那么这个解可以改善，所以一定不是最优解．

道理很简单：如果这个解在某弧上至少有两条重复弧，那么去掉其中的一对，还是一个解．去掉后，重复弧总长度显然缩短了．∎ 例如图17中解(2)就是从解(1)去掉一对重复弧 B_3A_4 而得到的．

这个浅显的命题却有重要的推论：





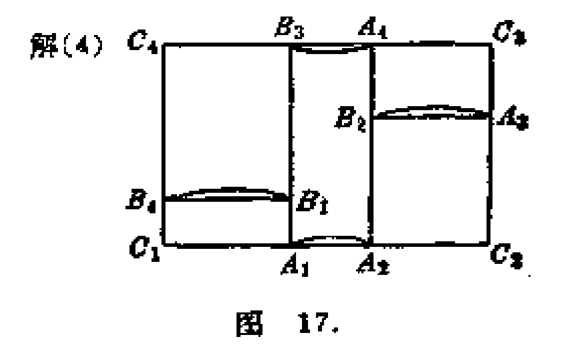


图 17.

推论 最优解是存在的．

这件事当然也是需要证明的，因为并非任何东西都有个"最"．例如，最大的整数是不存在的；最小的正数也不存在．

根据命题二，有重叠重复弧的解一定可以改善，使重叠重

复弧的条数减少．然而一个解里面，重叠重复弧的条数总是有限的，所以经过有限多次这种修改后，总会改成一个没有重叠重复弧的解．

而由于原网络只有有限条弧，没有重叠重复弧的解只能有有限多个．所以其中必有一个（或几个，至少有一个）解，它的重复弧总长度在这有限个解中间是最短的．不难看出，这个解一定是最优解．‖ 在这个证明中，又是“有限性”起了重要作用．在有限个解里头找个最好的，是一定找得到的．

找最优解只须在没有重叠重复弧的解里面去找．但是怎么去找呢？我们再提出一个修改的原则．

命题三 設有一个解，沒有重叠的重复弧，它在原网絡的某个圈上的重复弧长度的和超过圈长的一半，那么这个解可以改善，所以一定不是最优解．

这是因为在那个圈上，没有重复弧的弧的长度的和一定小于圈长的一半．既然这样，我们就可以在这圈上把原来的重复弧取消，而给原来没有重复弧的弧添上一条重复弧．这样修改后得到的仍是一个解，并且仍然没有重叠的重复弧，而重复弧的长度的总和却缩小了．‖ 例如，图 17 中的解(2)在圈 $A_1A_2B_2A_4B_3C_4B_4B_1A_1$ 上的重复弧长度和是 $3+3+4+1=11$，超过圈长$(2+3+2+2+3+4+3+1=20)$的一半，按上法修改后得到解(3)．但是解(3)在圈 $A_3C_3A_4B_2A_3$ 上的重复弧长$(2+3+2=7)$又超过圈长$(3+3+2+3=10)$的一半，再按上法修改得到解(4)．

从任意一个解出发，按命题二去掉重叠弧，再反复根据命

题三进行修改．由于没有重叠重复弧的解只有有限多个，不可能无限地修改下去，所以经过若干次修改后，一定能得出一个解，它既没有重叠的重复弧，在每个圈上的重复弧长又都不超过圈长的一半．上例图17中的解(4)就有这个性质．这样的解你能不能断定它就是最优的呢？用刚才的两种办法是不能把它再改善了，可是你怎么知道不会有别的办法改善它呢？下面的两个定理证明，这样的解确实不能再改善了．

定理七 如果两个解都满足下面两个条件：

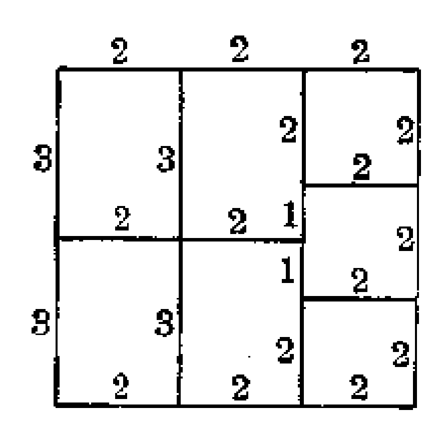
(1)没有重叠的重复弧；

(2)在原网络的每个圈上，重复弧长度的和不超过圈长的一半；

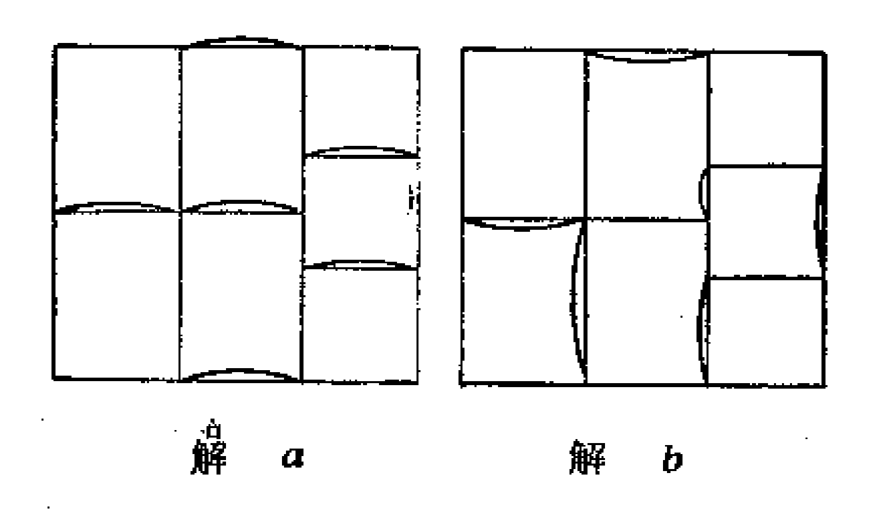
那么这两个解中的重复弧长度总和相等．

证明： 为方便，把这两个解记做 a, b, 原网络记做 G. 为了比较解 a、解 b 中重复弧的总长，我们把解 a、解 b 里所有的重复弧并在一起看，会有几对是互相重叠的(就是解 a 和解 b 里都是重复弧)．把这些重叠的重复弧去掉，不重叠的重复弧组成一个网络 G'，G' 是 G 的一部分．解 a、解 b 的重复弧总长度的差，就等于解 a、解 b 在 G' 上的重复弧的长度和的差．图18是个例子．图上最上一个图是街道图，也就是原网络 G．中间两个图就是合于上面条件的两个解 a 和 b．最下一个图就是新网络 G'．

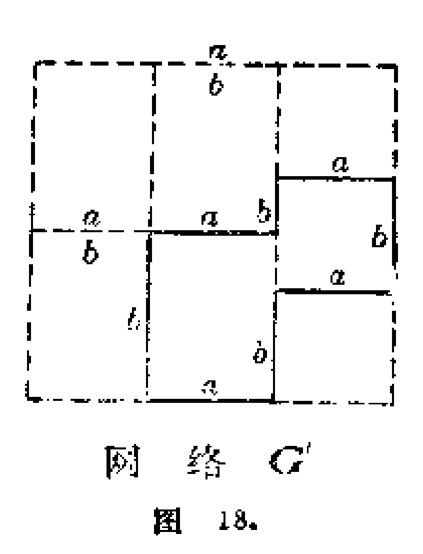
任取 G' 中的一个圈，那么这个圈的每条弧都是 a 的或 b 的重复弧．所以在这个圈上，a 的重复弧长度和加上 b 的重复弧长度和等于圈长．但 a 的重复弧长度和和 b 的重复弧长



街 道 图



解 a　　解 b



网 络 G'

图 18.

度和都不超过圈长的一半，因此在这个圈上，a 的重复弧长度和和 b 的重复弧长度和恰好相等。

然而 G' 是个没有奇顶点的网络。这是因为，任取一个顶点 A，解 a 和解 b 中以 A 为端点的重复弧条数或者同是奇数，或者同是偶数(决定于 A 是原网络的奇顶点还是偶顶点)，所以并起来一共是偶数条；而 G' 中以 A 为端点的弧，就是从这偶数条里减去几对互相重叠的(这也一定是偶数条)，所以还是偶数条。这说明 G' 是偶网络。

根据定理六，G' 的弧可以排成若干个圈。而上面说过，G' 的每个圈上 a 的重复弧长度和和 b 的重复弧长度和相等，所以在整个 G' 上 a 的重复弧长度总和和 b 的重复弧长度和也恰相等。由此可见 a 的重复弧长度总和和 b 的重复弧长度总和相等。∎

定理八 一个解是最优解的充分、必要条件是，它满足定理七中的条件(1)和(2)。

证明： 命题二和三说明了最优解必须满足条件(1)和(2)。现在来证明充分性，即满足(1)，(2)的解必是最优解。

根据命题二的推论，最优解是存在的。譬如说 a 是一个最优解。根据已证的必要性部分，a 一定满足(1)和(2)。今设 b 是满足(1)和(2)的任一解。根据定理七，a 的重复弧长度总和和 b 的重复弧长度总和相等，所以 b 一定也是最优解。∎

到此为止，最短邮递路线的问题可以说初步解决了。我们证明了最优解的存在性，并且具体给出了一种求解并将解改善的方法，证明了按这种方法修改有限次后一定能够得到

最优解．归纳起来，寻找最好投递路线的步骤如下：

(1)画出投递范围的街道图；

(2)找出街道图上的奇顶点；

(3)添重复弧把奇顶点对对相联；

(4)按命题二消去重叠的重复弧；

(5)按命题三反复修改，直到不能再改；

(6)将所得的有重复弧的网络一笔画出．

这种方法叫做**奇偶点图上作业法**．

为什么只说初步解决呢？因为这种找法还不够理想，用起来不够方便．原因是(5)这个步骤可能是相当长的，或者说定理七里的条件(2)是不容易检验的．象我们算过的那个街道图，其中就共有22个圈，逐个检查已很费事．稍为复杂一点，象图19的网络，其中圈数已多到几百，检查起来就不胜其繁了．从这个角度看，奇偶点图上作业法解决最短邮递路线问题，不及一笔画定理解决一笔画问题那样好．

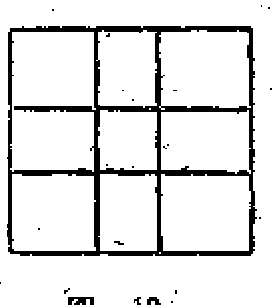


图 19.

奇偶点图上作业法在实际运用中已作出了许多贡献，通过了实践的考验而得到流传，同时也在实践中发现它还有不足的地方，期待着我们去进一步研究改进．

附录一　习题和提示

习　题

1.(1)证明，在每次乒乓球比赛中，打过奇数盘的选手共有偶数个．(注意，零是偶数．)

(2)参加某次比赛的有 225 人．每人至少打过 3 盘．证明，一定有人打过不止 3 盘．

2.能否找到一条折线，它和图 20 中的 16 条线段都交一次而且只交一次(不准在端点相交)？

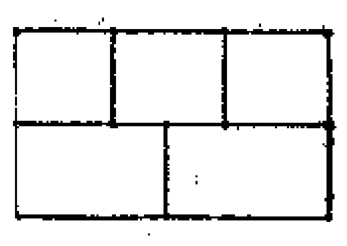


图　20.

3.某展览会共有 36 个展览室，布置如图 21，有阴影的室陈列实物，没有阴影的室陈列图片．邻室之间都有门可以通行．有人希望每个室都到一次而且只到一次，请替他设计一条参观路线．

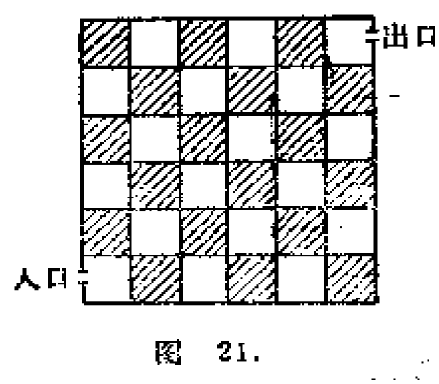


图　21.

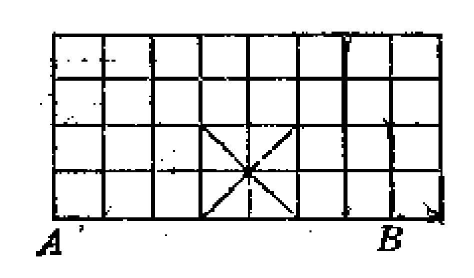


图　22.

4.图 22 是半张象棋盘．

(1)一只马跳了 n 步回到起点．证明 n 是偶数．

(2)一只马能否跳遍这半张象棋盘，每格都不重复，最后的一步跳回起点？

(3)证明一只马不可能从位置 B 出发跳遍半张象棋盘而每个格点只经过一次(不要求最后的一步跳回起点)．

(4)一只车从位置 A 出发，在这半张棋盘上走，每步走一格，走

了若干步后到了位置B．证明，至少有一个格点没被走过，或被走过不止一次．

5．证明，任给一个连通网络和它的一顶点，必能从这点出发走遍整个网络，最后回到原处，并且每条弧走过刚好两遍．

6．给了一个不连通的网络，怎样能从奇顶点在各分支中的分布情况来判断，画出它所需的最少笔数是多少？证明你的结论．

7．某邮递员的投递范围如图23，图上数字表示各段街道的长度．请设计一条最优投递路线．

8．最短邮递路线问题中，设原网络的奇顶点是$2n$个．证明，最优解一定是在原网络中添上n条路而成，这n条路把奇顶点一对一对连起来．（我们知道，添n条这种路却不一定是最优解．）

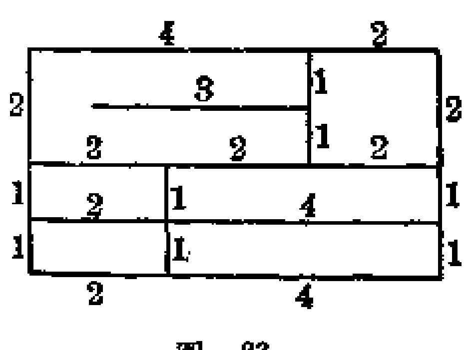


图 23．

9．对图24的街道图，设计一条最优投递路线．

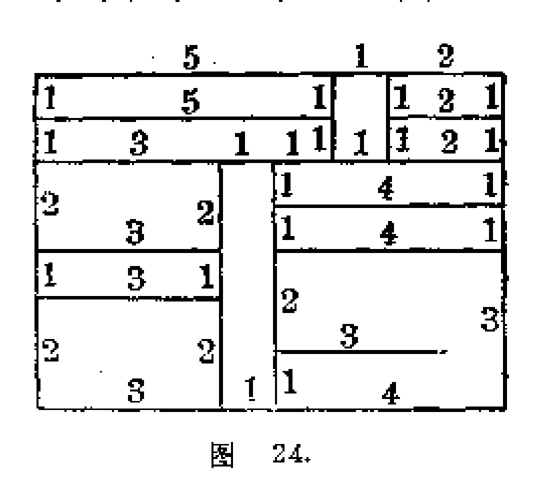


图 24．

提　示

1．复习定理四．

2．这样的折线不存在．实质上是一笔画问题．

3．那人的希望是无法实现的．这问题和一笔画问题貌似而实异．

应另想办法证明.

4. 把各格点分别涂上红蓝二色，使相邻的格点颜色不同. 这可能有助于你的思考. 再想想第3题.

5. 和一笔画有什么关系?

6. 设这网络有 $2n$ 个奇顶点，诸分支中有 m 个没有奇顶点. 那么画出这网络最少要 $n+m$ 笔.

7. 最优路线总长是48.

8. 看由重复弧生成的网络，证明它可以 n 笔画成.

9. 最优路线中重复弧长总和是14. 这网络有24个奇顶点，圈又极多，用奇偶点图上作业法不大合适. 上题可能会给我们启发.

附录二　哥尼斯堡的七座桥

欧拉(1736 年)*

1. 讨论长短大小的几何学分支一直被人们热心地研究着，但是还有一个至今几乎完全没有探索过的分支；莱布尼兹最先提起过它，叫它"位置的几何学"(geometria situs)．这个几何学分支讨论只与位置有关的关系、研究位置的性质；它不去考虑长短大小，也不牵涉到量的计算．但是至今未有过令人满意的定义，来刻划这门位置几何学的课题与方法．近来流传着一个问题，它虽然无疑是属于几何学的，却不是求一个尺寸，也不能用量的计算来解答；所以我毫不犹豫就把它归入位置几何学，特别还因为要解答它只需要考虑位置，不用计算．在这里我要讲一讲我所发现的解答这类问题的方法，它可以作为位置几何学的一个例子．

2. 问题——据我了解它是相当著名的——是这么说的：在普鲁士的哥尼斯堡镇有一个岛，叫"奈发夫"，普雷格尔河的两支绕流其旁(见第3页图4)．七座桥 a, b, c, d, e, f, g 横跨这两条支流．问，一个人能不能设计一次散步，使得每座桥都走过一次，而且不多于一次．人家告诉我说，有些人否定这样做的可能性，也有些人怀疑，但是没人坚持一定可能．在这个基础上我向自己提出了下面这个很一般的问题：给定任意一个河道图与任意多座桥，要判断可能不可能每座桥恰好走过一次．

3. 哥尼斯堡七座桥这个特殊问题可以这样来解决：细心地把所有可能的走法列成表格，逐一检查哪些(如果有的话)是满足要求的．然而，这种解法太乏味而且太困难了，因为可能的组合的数目太大，而对于别的桥数更多的问题它根本就不能用，如果照刚才说的办法去分析，就要引出许许多多与问题无关的枝节；这无疑是这种方法所以麻烦的

* 譯自 J. R. Newman 編的 The World of Mathematics 一书，1956 年版，573—580 頁。

原因．因此我放弃了它，去寻求另一种更专用的方法；那就是说，这种方法要只告诉我们怎样能一下子找出满足要求的路线；我相信，这样的方法会简单得多．

4．我的整个方法的根据是，以适当的并且简易的方式把过桥记录下来：我用大写字母 A、B、C、D 表示被河分割开的各块陆地．当一个人从 A 地过桥 a 或 b 到 B 地时，我把这次过桥记作 AB，第一个字母代表他来的地方，第二个字母代表他过桥后所到的地方．如果步行者接着从 B 过桥 f 到 D，这次过桥记作 BD；这接连的两次过桥 AB 与 BD 我就用三个字母 ABD 来记录，中间的字母 B 既表示第一次过桥时进入的地方，又表示第二次过桥时离开的地方．

5．类似地，如果步行者继续从 D 过桥 g 到 C，我把这接连的三次过桥用四个字母 $ABDC$ 来记录．这四个字母表示原在 A 处的步行者过河到 B，然后到 D，最后到 C；既然这些地方之间都被河隔开，步行者必须过三座桥．过四座桥将用五个字母表示，而且，如果步行者过任意多座桥，代表他的路线的字母个数比桥数多一．例如，过七座桥要用八个字母．

6．按这方法，我不去注意用的是哪些桥；那就是说，当从一地过河到另一地有好几座桥时，不去管他走的是哪一座．于是，如果有一条路线走过哥尼斯堡的七座桥每座恰好一次，我们就能用八个字母来表示这条路线；而且在这串字母里，AB（或 BA）这组合要出现两次，因为有两座桥连结 A、B 两地区；类似地，AC 这组合要出现两次，而 AD，BD，CD 这些组合各出现一次．

7．于是我们的问题已经化成，怎样能用四个字母 A，B，C，D 排成八个字母的串，使得刚才提到的各种组合在其中出现所需要的次数．然而，在努力寻求这样的排法之前，我们即使考虑一下在理论上它是不是可能存在，也是好的．因为若是能够证明这样的排法其实是不可能的，那么我们去求它就等于白费力气．所以我就去寻找一个法则，对于这个问题或所有类似的问题，用这个法则能简易地判断所要求的字母排법是不是行得通．

8. 为了寻找这样的法则，我取出一个地区 A，有任意多座桥通到 A，譬如 a, b, c, d 等等(图 25)。

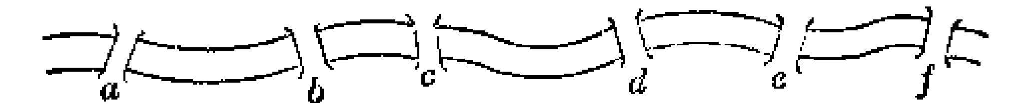


图 25.

我先只考虑桥 a. 如果步行者过这座桥，他必定过桥前在 A 或者过桥后到 A，所以按上述的记录方法，字母 A 一定出现一次. 如果有三座桥 a、b、c 通到 A，而步行者三座桥都走过一次，那么不管他是不是从 A 出发，字母 A 将在他的路线的表示式里出现两次. 如果有五座桥通到 A，在走过所有这些桥的表达式里字母 A 将出现三次. 如果桥的个数是奇数，加上一再取其半；所得的商恰好代表字母 A 出现的次数.

9. 现在让我们回到哥尼斯堡问题(图 4). 因为有五座桥 a、b、c、d、e 通往岛 A，在那路线的表示式里字母 A 必须出现三次；因为有三座桥通 B，字母 B 必须出现两次；类似地，D 与 C 必须各出现两次. 那就是说，在代表过七座桥的路线的那八个字母的串里，必须有三个 A，各两个 B、C、D；但是对于八个字母的串来说这当然是不可能的. 这就看出，按所要求的方式走遍哥尼斯堡的七座桥是不能实现的.

10. 用这方法我们总能判断，当通到各地区的桥数都是奇数时，能否在一次散步里走过每座桥恰好一次. 如果桥数加一等于各字母应出现次数的和，这样的路线就存在. 另一方面，如果这和数大于桥数加一，象在我们的例子里那样，那么所希望的路线就作不出来. 我所提出的(第 8 节)从通 A 的桥数来定出字母 A 出现次数的规则，是与这些桥通往同一地区(象图 2)或通往几个地区无关的，因为我只考虑地区 A，只想定出 A 出现的次数.

11. 当通到 A 的桥数是偶数时，我们必须考虑这路线是不是从 A 开始. 例如，如果有两座桥通到 A 而且路线从 A 开始，那么字母 A 要出现两次，一次表示从 A 出发过一座桥，第二次表示从另一座桥回到 A. 然而如果步行者从另一地区开始他的行程，字母 A 将只出现一次，因为按我的记法，A 的这次出现既能表示进入 A 又能表示离开 A.

12. 假定有四座桥通到 A, 而且路线从 A 开始. 那么字母 A 在这整个路线的表示式里将出现三次; 如果路线从别处开始, A 只出现两次. 对于有六座桥的 A, 当 A 是起点时字母 A 出现四次, 否则只有三次. 一般地说, 如果桥数是偶数, 那么字母 A 的出现次数当起点不在 A 时等于桥数的一半, 当起点在 A 时等于一半加一.

13. 当然, 每条路线必定从一个地区开始. 因此, 根据通到各地区的桥数, 我按下面的办法来定出各相应的字母在整个路线的表示式里出现的次数: 当桥数是奇数, 加上一再拿二除; 当桥数是偶数, 就用二除它. 这时如果所得各数的和等于实有桥数加一, 这散步是可以实现的, 不过必须从通奇数座桥的地区出发. 如果这和数比桥数加一少一, 这散步也可以实现, 只要它的出发点是通偶数座桥的地区, 因为这时那和数又该加一.

14. 为判断在任意给定的河——桥系统里是不是可能走过每座桥恰好一次, 我的程序是: (1)先把被水隔开的各地区用 A、B、C 等等代表. (2)取桥的总数, 加上一, 写在表格的顶端. (3)表的第一列列出字母 A、B、C 等等, 第二列写下通往各该地区的桥数. (4)在对着偶数的字母上打星号. (5)把第二列里各偶数的一半, 及各奇数加一的一半, 写在第三列. (6)把第三列各数加起来. 如果这和数比顶上的数少一或相等, 我断定所要求的路线是作得出的. 但是要注意, 当和数比顶上的数少一时, 路线必须从带星号的地区出发, 而在另一情形, 当这两数相等时, 必须从没有星号的地区出发.

对于哥尼斯堡问题, 我列出下面的表:

桥数 7,		7+1=8
A	5	3
B	3	2
C	3	2
D	3	2

最后一列加起来超过 8, 所以所希望的路线是作不出的.

15. 让我们看一个四条河两个岛的例子, 图 26. 十五座桥, 标以 a、b、c、d 等等, 跨在各河上. 问能不能安排一条路线, 通过所有的桥恰好

一次．(1)我先把被水分隔的各地区用字母 A、B、C、D、E、F 标出，一共六个．(2)我把桥数(15)加一，16，写在顶上．(3)我把字母 A、B、C 等等写成一列，在旁边一列里写出联到各该地区的桥数，例如，A 是 8，B

		16
A^*	8	4
B^*	4	2
C^*	4	2
D	3	2
E	5	3
F^*	6	3
		16

是 4，等等．(4)对应于偶数的字母标上星号．(5)在第三列里我写下各偶数的一半或各奇数加一的一半．(6)最后我把第三列的数加起来，得到和数 16．这与顶上的数 16 相同，所以这路线是能实现的，只要它从地区 D 或 E 开始，这两个字母没有星号．下面的式子代表一条这样的路：

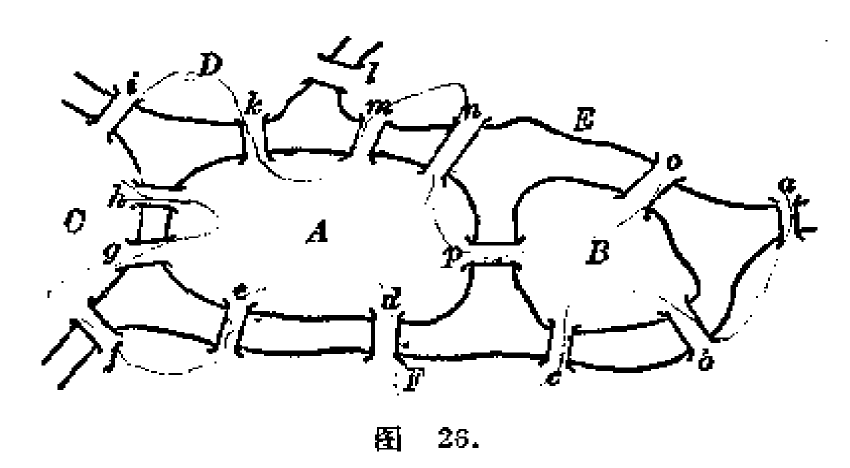


图 26.

$$EaFbBcFdAeFfCgAhCiDkAmEnApBoElD.$$

这里我也用夹在大写字母之间的小写字母指出了过的是哪些桥．

16. 即使在相当复杂的情形，用我们的方法也总能简易地判断顺次走过每座桥是不是的确可能．但是我现在还想指出另一种更简单得多的方法，它很容易从上面的方法引伸出来，只要稍作准备就行了．首先我注意到，通到各地区的桥数，即表格里第二列的各数，加起来必定是

实有桥数的两倍．理由是，在列出通各地区的桥的表格时每一座桥被数了两次，一头一次．

17. 从这一事实推出，第二列各数的和一定是偶数，因为它的一半等于实有的桥数．所以这些数目（它们代表与各地区相连的桥数）里不会恰有一个奇数，也不可能有三个或五个奇数．换句话说，如果这些数里有奇数，奇数的个数一定是偶数．譬如，在哥尼斯堡问题里，字母A、B、C、D所对应的四个数全是奇数（第14节），而在刚才的例子（第15节）里只有两个数是奇数，即D、E所对应的那两个．

18. 由于A、B、C等等所对应的数字的和是桥数的两倍，如果这和数加二再除以二显然将得出写在顶上的数．当第二列的数全是偶数时，第三列里是各数的一半，这列的总和将比顶上的数少一．这时总可以走遍所有的桥．因为不管路线从什么地方开始，这地方一定与偶数座桥相连，符合我们对起点的限制．譬如说，在哥尼斯堡问题里我们可以安排得每座桥走过两次，这等于说把每座桥分成两座，这时通到每个地区的桥都成了偶数座．

19. 进一步，当第二列的数里只有两个奇数而其余都是偶数时，所求的路线是可能的，但须从通奇数座桥的地方出发．按我们的程序取各偶数的一半与各奇数加一的一半，这些一半的和就将比桥数多一，所以等于顶上的数．

类似地，当第二列里有四个（或六个、八个等等）奇数时，显然第三列里的和将比顶上的数多一（或多二、多三等等）．所以所求的路线是不可能的．

20. 于是，对于任意的河——桥图，要判断可能不可能把所有的桥走一次，最简单的办法是采用下列法则：

> 如果通奇数座桥的地方不止两个，满足要求的路线是找不到的．
>
> 然而如果只有两个地方通奇数座桥，可以从这两个地方之一出发，找出所要求的路线．
>
> 最后，如果没有一个地方是通奇数座桥的，那么无论从哪里出

发，所求的路线总能实现.

这些法则完全解答了最初提出的问题.

21. 在我们断定了路线的确存在以后，还要把它找出来. 这时下面的法则是有用的：如果可能的话，我们在心里把连结同一对地区的任意两座桥抹去；这样做常常可以使桥的数目大大地缩小. 然后——这不会很难——我们在剩下的桥上描出所要求的路线. 在我们找到这样的路线以后，不须大改动就能把起先抹掉不看的桥补上，这只要稍为一想就明白了；所以我觉得，关于怎样找这些路，我不用多说了.